**Problema P12 (Funzioni di Green. Il problema di Dirichlet sul semipiano e sulla sfera.)**

(i) Sia $U$ un aperto, connesso e limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia $G$ la sua funzione di Green. Si dimostri che se $u \in C^2(\bar{U})$ soddisfa $-\Delta u = f$ su $U$ e $u = g$ su $\partial U$, allora

$$u(x) = -\int_{\partial U} g(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)d\sigma(y) + \int_U f(y)G(x,y)dy \ , \quad \forall\ x \in U \ .$$

[Suggerimento: si usino le identità di Green.]

(ii) Si dimostri che $G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x})$, con $\tilde{x} := (x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)$, è la fuzione di Green del semispazio $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ e che

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^n} =: K(x,y) \quad \text{(nucleo di Poisson per il semispazio).}$$

(iii) Dimostrare che

$$\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} K(x,y)d\sigma(y) = 1 \ , \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n_+ \ ,$$

(si noti che $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ significa che $y = (y_1, ..., y_{n-1}, 0)$ e che $d\sigma(y) = dy_1 \cdots dy_{n-1}$).

(iv) Dimostrare che, per ogni $g$ continua e limitata su $\partial\mathbb{R}^n_+$, la funzione $u$ definita da

$$u(x) = \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} K(x,y)g(y)d\sigma(y) \ , \qquad x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{1}$$

è armonica su $\mathbb{R}^n_+$.

(v) Dimostrare che, per ogni $g$ continua e limitata su $\partial\mathbb{R}^n_+$, la funzione $u$ definita in (1) soddisfa

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = g(x_0) \ , \qquad \forall\ x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+ \ ,$$

e che, quindi,

*$u$ definita in (1) e $u = g$ su $\partial\mathbb{R}^n_+$ è una funzione $C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ e soddisfa il problema di Dirichlet: $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n_+$ e $u = g$ su $\partial\mathbb{R}^n_+$.*

[Suggerimento: per il punto (iii) si ha che $u(x) - g(x_0) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)(g(y) - g(x_0)d\sigma(y)$; si consideri una sferetta $B(x_0, \delta)$ e si spezzi l'integrale in (1) sui domini $\mathbb{R}^n_+ \backslash B(x_0, \delta)$ e $B(x_0, \delta) \cap \mathbb{R}^n_+$....]

(vi) Si dimostri che $G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi\big(|x|(y-\hat{x})\big)$, con $\hat{x} := x/|x|^2$ è la funzione di Green per la sfera $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ e che

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \frac{1}{n\alpha(n)}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n} =: K_1(x,y) \quad \text{(nucleo di Poisson per la sfera unitaria).}$$

(vii) Per $r > 0$, definiamo

$$K_r(x,y) := \frac{1}{n\alpha(n)r}\frac{r^2-|x|^2}{|x-y|^n} \quad \text{(nucleo di Poisson per la sfera } B(0,r)) \ ,$$

e, per $g \in C\big(\partial B(0,r)\big)$ sia

$$u(x) = \int_{\partial B(0,r)} K_r(x,y)g(y)d\sigma(y) \ , \qquad x \in B(0,r) \ . \tag{2}$$

Si dimostri che $u$ è armonica in $B(0,r)$ e che $\lim_{x\to x_0} u(x) = g(x_0)$ per ogni $x_0 \in \partial B(0,r)$. Quindi:

*$u$ definita in (2) e $u = g$ su $\partial B(0,r)$ è una funzione $C^2(B(0,r)) \cap C(\overline{B(0,r)})$ e soddisfa il problema di Dirichlet: $\Delta u = 0$ in $B(0,r)$ e $u = g$ su $\partial B(0,r)$.*